Проф. д.т.н. А. Грунауэр

К вопросу о построении овалов (кривых) Кассини

В ряде математических справочников [1], [2], [3], [4] приводятся сведения об овалах Кассини, описывается их геометрическое определение и записываются уравнения в декартовой и полярной системах координат. Указывается также, что форма кривой зависит от соотношения между параметрами *a* и *e*. В справочнике [2] приводятся также формулы для координат точек экстремума и точек перегиба.

Однако в упомянутых справочниках не обсуждаются такие вопросы:

- к
  аковы ограничения на множество значений аргумента;
- к
  аков геометрический смысл двух знаков в уравнении овала Кассини в полярной системе координат и в каких случаях какой знак следует использовать.

Поставим своей целью ответить на эти вопросы.

Как известно, уравнение овала Кассини в полярной системе координат таково:

$$r^2 = e^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4 \cos^2 2\varphi + a^4 - e^4}, \tag{1}$$

где r и φ – полярные координаты точек кривой

a и e – Параметры, определяющие фому и размеры кривой. (a>0 и e>0)

В зависимости от соотношения между a и e, имеют место следующие случаи.

1. $a > e\sqrt{2}$.

Кривая имеет форму сходную с эллипсм. Точки перегиба на ней отсутствуют. Оси координат служат осями симметрии. Последнее свойство сохраняется и во всех последующих случаях.

Аргумент φ может принимать любые значения в пределах [0, 2π]. В формуле (1) следует использовать знак (+), так как в противном случае r^2<0.

2. $e < a < e\sqrt{2}$.

В этом случае на кривой появлятся 2 вогнутых участка, на границах между которыми лежат 4 точки перегиба. Пределы изменения φ и рекомендация по выбору знака в формуле (1) сохраняются.

3. $a = e$.

Этому частному случаю соответствует *лемниската Бернули.* В справочнике [1] указаны ограничения на значения

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Формула (1) принимает более простой вид:

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \tag{2}$$

где отсутствуют два знака.

Таким образом, для данного частного случая справочник [1] дает ответ на поставленные вопросы.

В остальных справочниках [2], [3], [4] пределы изменения φ не указываются.

4. *a<e*

Кривая Кассини распадается на две замкнутые непересекающиеся кривые. Теперь *допустимая область задания арумента φ зависит от отношения a/e.*

При $a<e$ подкоренное выражение в формуле (1) может быть меньше 0 при значениях φ близких числам кратным π/4. Найдем значения φ, при которых выполняется условие:

$$e^4\cos^2(2\varphi) + a^4 - e^4 = 0. \quad (2)$$

Наименьший угол, удовлетворяющий этому уравнению

$$\varphi_m = \frac{1}{2}\arccos\sqrt{1-\frac{a^4}{e^4}} \ . \quad (3)$$

Если обозначить

$$\Delta = \frac{\pi}{4} - \varphi_m ,$$

то отрезки

$$\left[\frac{k\pi}{4} - \Delta, \frac{k\Delta}{4} + \Delta\right] \qquad (\text{при } k = 1, 3, 5\ 7\ )$$

являются недопустимыми для угла φ. Эти отрезки отмечены штриховкой на рис. 1.

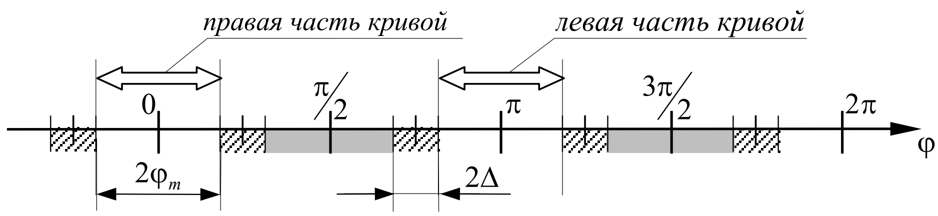

Рис. 1.

Недопустимы также отицательные значения r^2 в формуле (1), которым соответствуют отрезки

$$\left[\frac{\pi}{4} + \Delta, \frac{3\pi}{4} - \Delta\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{5\pi}{4} + \Delta, \frac{7\pi}{4} - \Delta\right].$$

На рис. 1 они отмечены фоном. Следовательно, *оба условия выполняются только на отрезках*

$$\left[-\frac{\pi}{4} + \Delta, \frac{3\pi}{4} - \Delta\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{3\pi}{4} + \Delta, \frac{5\pi}{4} - \Delta\right]$$

На первом из этих отрезков обрауется правая часть кривой, а на втором – левая.

Расмотрим более подробно образование верхней половиы правой кривой, когда угол φ изменяется от 0 до φ_m. Из чертежа (рис. 2) видно, что в этих пределах каждому значению φ соответствуют 2 точки на кривой Кассини. Одна на внутренней части кривой *MW* и вторая на её внешней части *AM.*

Внешней части кривой соответствует знак (+) в формуле (1). Внутренней - знак (-) и соответственно полярные радиусы r_1 и r_2 .

Случаю, когда угол φ принимает наибольшее допустимое значение φ_m , соответствует касанию полярного радиуса с кривой Кассини. Подкоренное выражение в формуле (1) равно 0 и $r_1 = r_2$.

Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных отрезков кривой Кассини, основываясь на свойствах её симметрии.

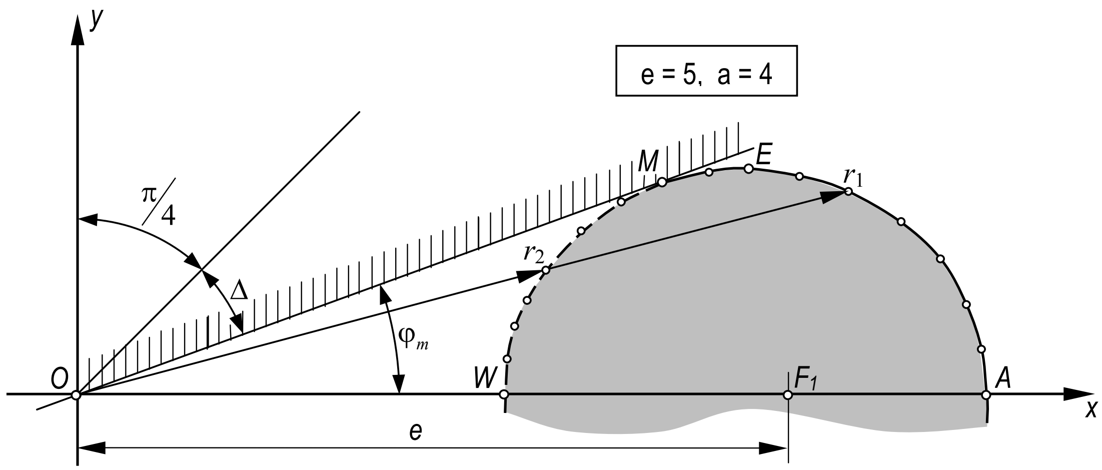

Рис. 2

Повидимому, в справочных пособиях было бы полезно указывать описанные свойства кривой Кассини, особенно для случая $a < e$.

Литература

1. *Bartsch, H. J.* :Taschenbuch mathematischer Formeln. 21. Auflage. Carl Hanser Verlag, Leipzig 2007
2. *Bronstein, I.N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., Mühlig, H.* : Taschenbuch der Mathematik. 6. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M 2006.
3. Duden: Rechnen und Mathematik. 6. Auflage. Dudenverlag. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich 2000.
4. *Stöcker, H* (Herausgeber): Taschenbuch mathematischer Formeln. 4. Auflage. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M 2003.