

А. А. Грунауэр

Построение линии пересечения и разверток двух цилиндров, оси которых пересекаются

Эта геометрическая задача возникает при подготовке труб к сварке. По её результатам могут быть изготовлены шаблоны (выкройки), по которым будут обрабатываться места сварки труб.

Исходные данные:

радиус большего цилиндра r_1 ;

радиус меньшего цилиндра r_2 ;

угол между осями цилиндров α .

Введем две системы координат $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$ (Рис. 1), связанные соответственно с большим и меньшим цилиндрами.

Оси z_1 и z_2 направим вдоль осей цилиндров 1 и 2. Начало отсчёта O совместим с точкой пересечения этих осей.

Плоскость, в которой лежат оси Oz_1 и Oz_2 обозначим через V . Расположим в этой же плоскости оси Oy_1 и Oy_2 . Тогда оси Ox_1 и Ox_2 перпендикулярны плоскости V и совпадают между собой.

Выберем плоскость V в качестве вертикальной плоскости проекций и построим проекции на эту плоскость заданных цилиндров.

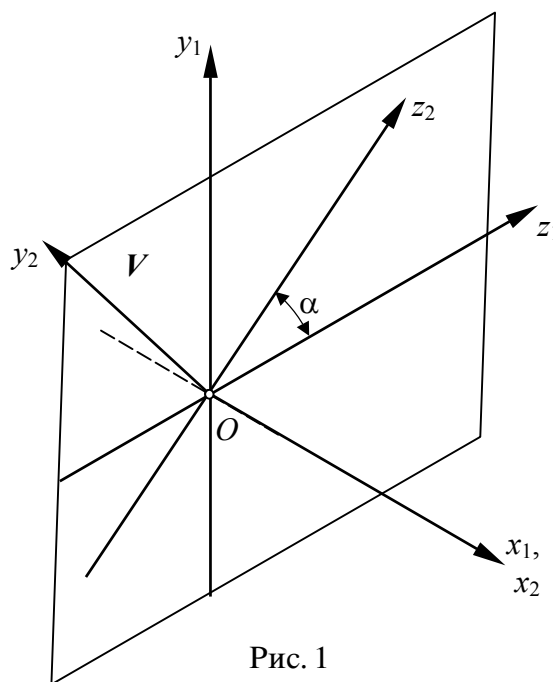


Рис. 1

Решение будем вести, пользуясь вспомогательной шаровой поверхностью радиуса R , пересекающей оба цилиндра. Условием пересечения является:

$$R_{\min} < R < R_{\max},$$

где R_{\min} и R_{\max} - радиусы шаров, проходящих через крайние точки A и B искомой линии пересечения. (Рис. 2)

Линиями пересечения шара с цилиндрами являются окружности L_1 и L_2 , которые проектируются на плоскость V отрезками $D''E''$ и $C''H''$. Точки G и F пересечения окружностей принадлежат искомой линии пересечения цилиндров. Их вертикальные проекции совпадают с точкой пересечения отрезков $D''E''$ и $C''H''$.

На рис. 3 показаны вертикальные (G'' , F'') и боковые (G''' , F''') проекции точек линии пересечения цилиндров, а также их проекции G_u , F_u на плоскость x_2Oy_2 , обозначенную для краткости U .

На боковой проекции показаны значения x_1 и y_1 декартовых координат точки F и её цилиндрические координаты φ_1 и l_1 , используемые для построения развертки цилиндра 1.

На плоскости U отмечены декартовы координаты x_2 и y_2 точки F а также её координаты φ_2 и l_2 , служащие для построения развертки цилиндра 2.

При изменении радиуса R вспомогательного шара от R_{\max} до R_{\min} положение точки на линии пересечения изменяется от A до B , чему соответствует изменение угла φ_2 в пределах от $-\pi$ до $+\pi$ и дуги l_2 от $-\pi r_2$ до $+\pi r_2$.

В приведенном выше описании в качестве независимого параметра был принят радиус шара R . Чтобы упростить построения, удобнее принять в качестве аргумента угол φ_2 и менять его с постоянным шагом от 0 до $\pm\pi$, приняв в качестве начала отсчёта точку A . Это упростит построения и позволит использовать свойства симметрии линии пересечения цилиндров.

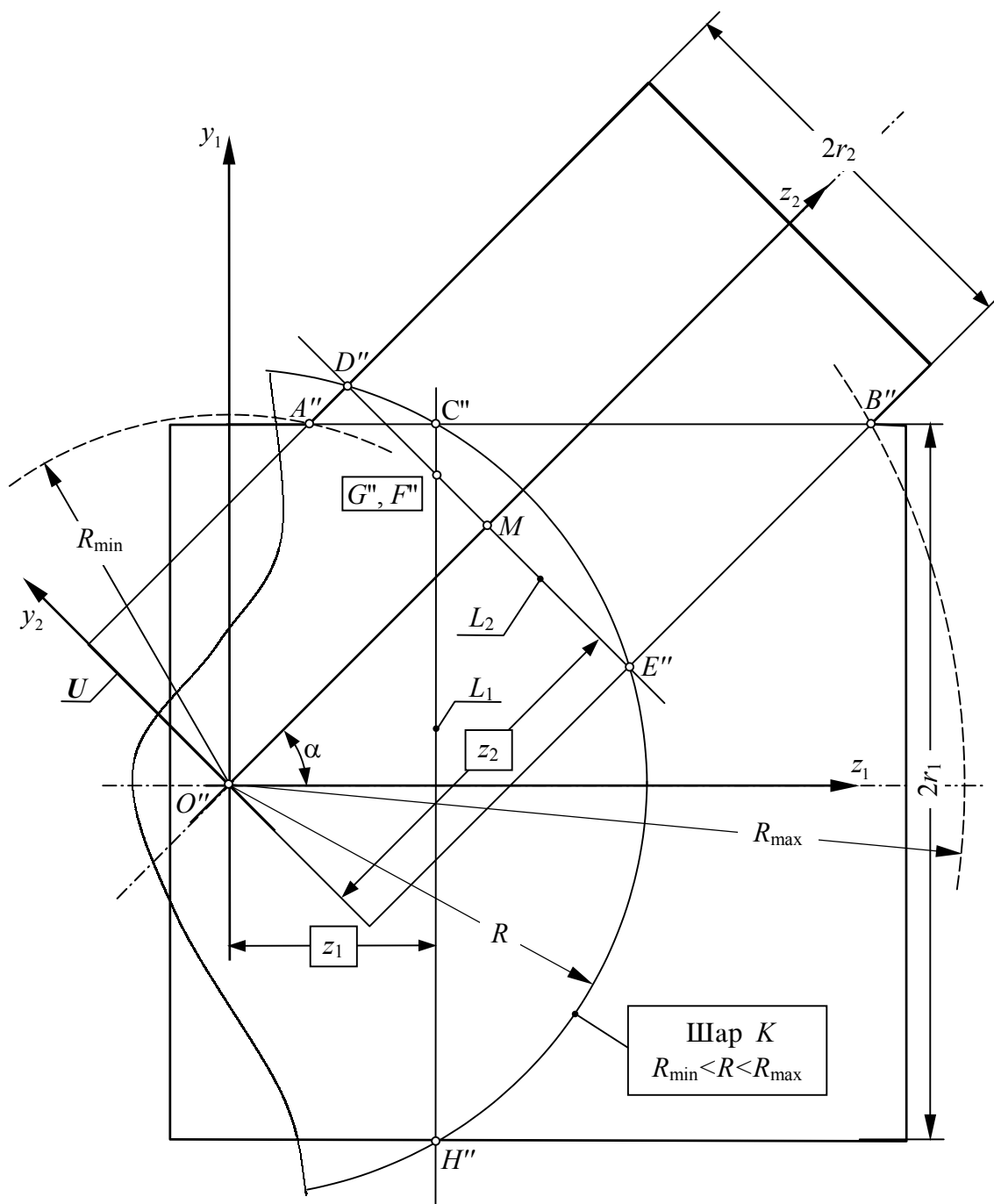


Рис. 2.

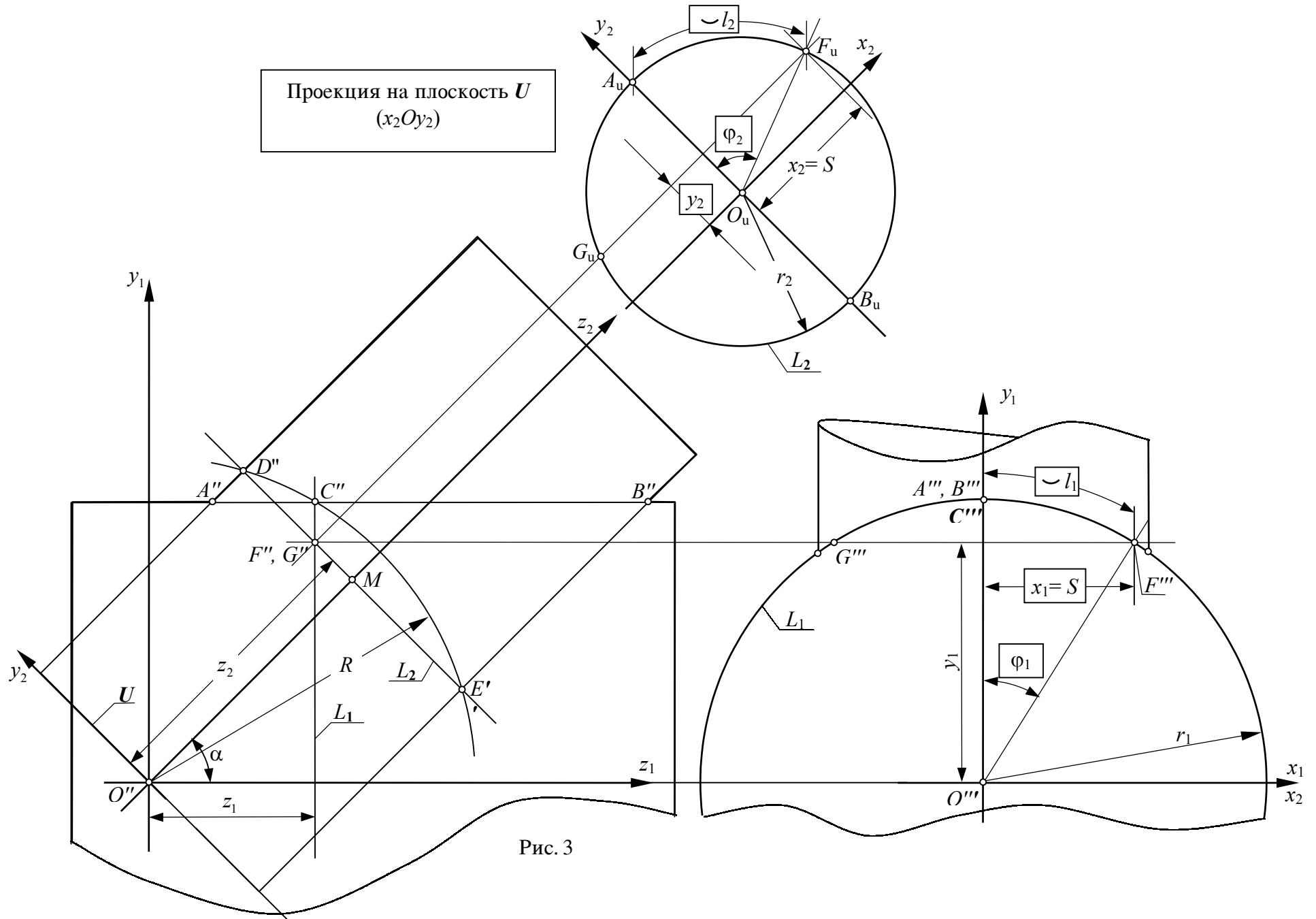


Рис. 3

Непосредственно из рис. 3 видно, что:

$$l_2 = \varphi_2 r_2, \quad (1)$$

$$y_2 = r_2 \cos \varphi_2 \quad (2)$$

$$x = x_1 = x_2 = r_2 \sin \varphi_2, \quad (3)$$

$$y_1 = \sqrt{r_1^2 - x^2}, \quad (4)$$

$$\varphi_1 = \arctan \left(\frac{x}{y_1} \right), \quad (5)$$

$$l_1 = r_1 \varphi_1, \quad (6)$$

Для определения величин z_1 и z_2 покажем часть рис. 2, на котором отметим необходимые точки (рис. 4). Для упрощения записи индексы " " здесь не показаны.

Запишем длины сторон треугольников OMV и FMN (отмечены фоном на рис. 4). Учтём, что углы $\angle MOV$ и $\angle MFN$ равны между собой, так как их стороны взаимно перпендикулярны.

Катеты треугольника OMV равны:

$$MV = z_2 \sin \alpha; \quad OV = z_2 \cos \alpha.$$

Катеты треугольника FMN :

$$MN = y_2 \sin \alpha; \quad FN = y_2 \cos \alpha.$$

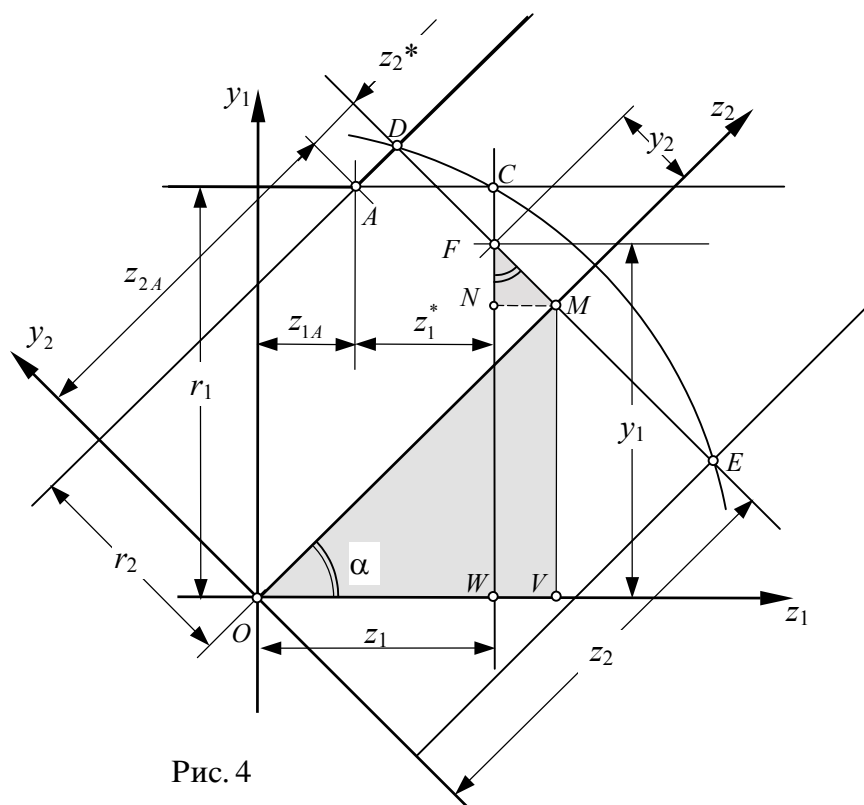


Рис. 4

Из рис. 3 видно, что:

$$OV - MN = OW; \quad (7)$$

$$MV + FN = FW. \quad (8)$$

Но $OW=z_1$ и $FW=y_1$, следовательно, подставив записанные выражения в (7) и (8), получим два недостающих для определения z_1 и z_2 уравнения:

$$z_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha = z_1; \quad (9)$$

$$z_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha = y_1. \quad (10)$$

Если для справок надо найти соответствующее значение R , (рис. 2.) оно может быть вычислено так:

$$R = \sqrt{r_2^2 + z_2^2}. \quad (11)$$

При изготовлении шаблонов под сварку, удобнее отсчитывать расстояние вдоль осей цилиндров от точки A , то есть перенести начало отсчёта z_1 на величину z_{1A} в точку O^* (см. рис. 4) и пользоваться координатой z^*_1 вместо z_1 .

Из рисунка видно, что:

$$z^*_1 = z_1 - z_{1A}. \quad (12)$$

Аналогично для второго цилиндра:

$$z^*_2 = z_2 - z_{2A}. \quad (13)$$

Сдвиги z_{1A} и z_{2A} показаны на рис. 4.

Пример решения.

Ниже приведено построение линии пересечения и развёрток двух цилиндров с радиусами

$$r_1 = 35 \text{ mm} \text{ и } r_2 = 30 \text{ mm},$$

оси которых пересекаются под углом $\alpha = 65^\circ$.

Шаг изменения угла φ_2 был выбран $\pi/8$.

Все необходимые величины были подсчитаны по формулам 1 - 6 и 9, 13.

Для построения горизонтальной проекции линии пересечения использовались значения z^*_1 и x . Вертикальная проекция строилась с помощью величин z^*_1 и y_1 . (Рис. 4)

Развёртки цилиндров строились в координатных системах l_1, z^*_1 и l_2, z^*_2

Они представлены на рис. 5 и 6. На этих рисунках фоном отмечены сохраняющиеся части цилиндров.

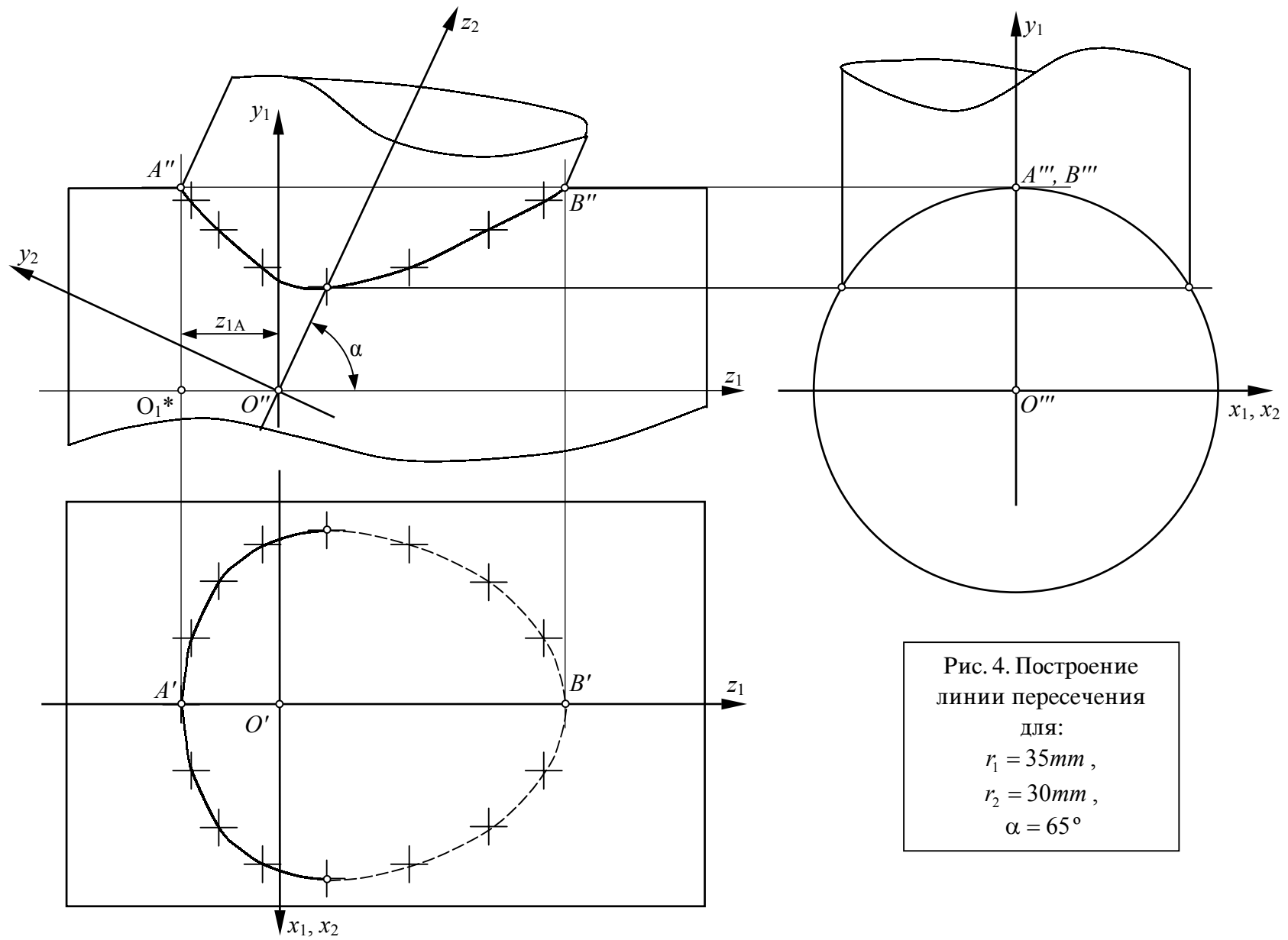
При выбранных размерах развёртка цилиндра 2 имеет максимумы в точках A и B и минимумы в промежуточных точках.

Для сравнения была построена развёртка цилиндра 2 (рис. 7.) при радиусах цилиндров

$$r_1 = 60 \text{ mm}, \quad r_2 = 30 \text{ mm}$$

и угле $\alpha = 45^\circ$. На этом рисунке построена только правая часть развёртки на отрезке $[0, \pi]$. На отрезке $[-\pi, 0]$ она может быть построена с использования свойства симметрии относительно вертикальной прямой, проходящей через точку A .

В рассматриваемом случае ограничивающая кривая имеет только максимум в точке B и минимум в точке A . Будем называть такую развёртку "одногогорбой" в отличие от "двугорбой", представленной на рис. 6.



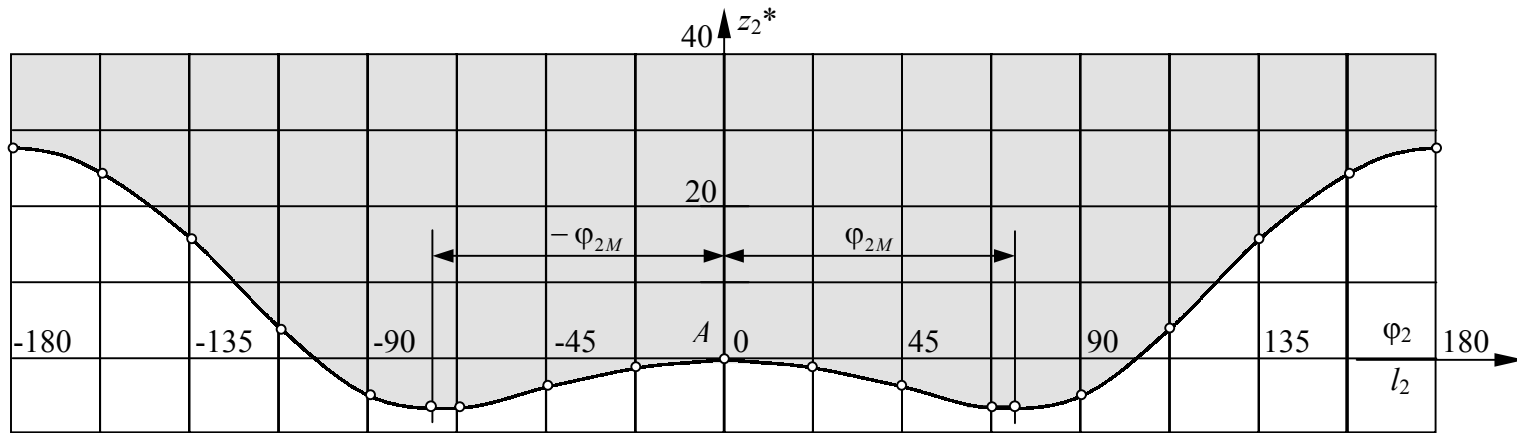


Рис. 5
Развёртка цилиндра 2

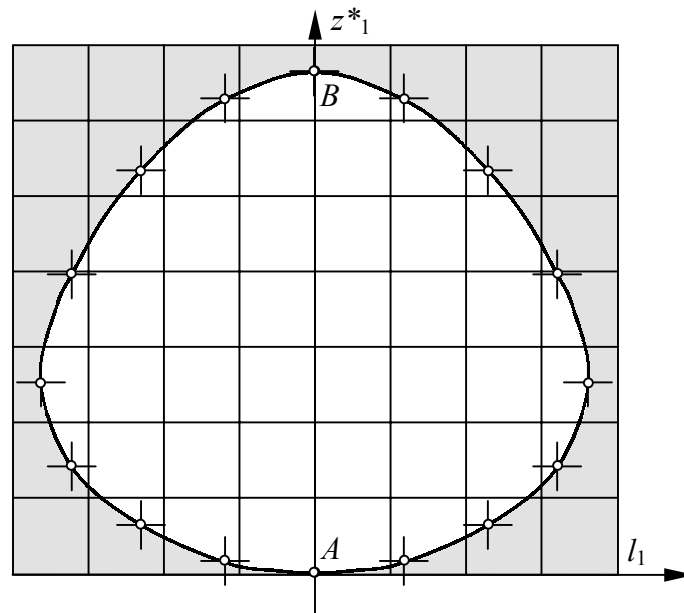


Рис. 6
Развёртка цилиндра 1

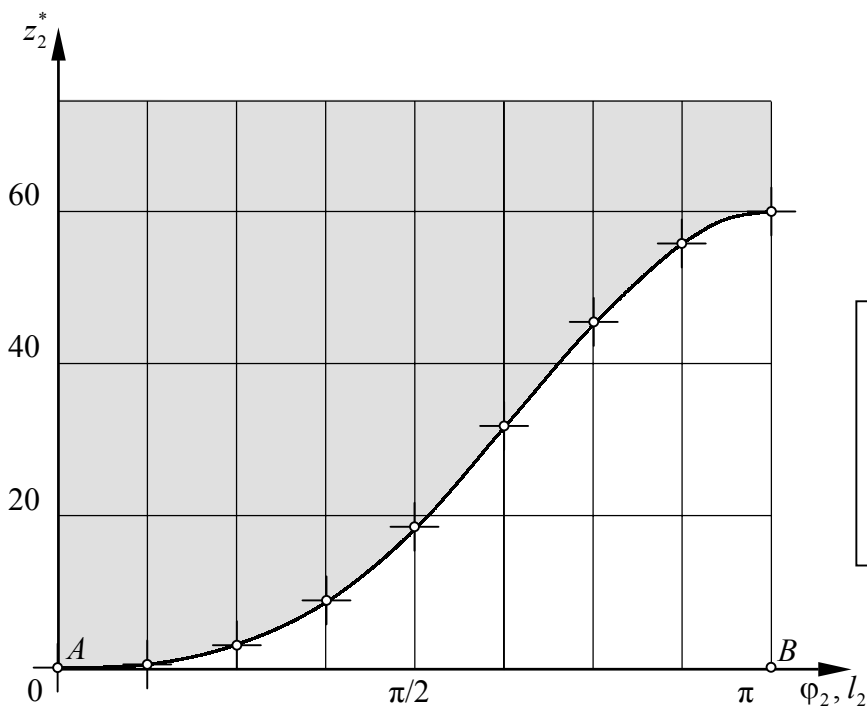


Рис. 7 Правая часть
развёртки
цилиндра 2 при
 $r_1 = 60 \text{ mm}$,
 $r_2 = 30 \text{ mm}$,
 $\alpha = 45^\circ$

Определение условий наличия экстремума внутри отрезка $[A, B]$.

Введём безразмерный параметр

$$\lambda = r_2/r_1 \quad (14)$$

Пользуясь формулами (4), (3), (10), получим:

$$z_2 = \frac{y_1 - y_2 \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Введём сюда параметр λ :

$$z_2 = \frac{r_1}{\sin \alpha} \left(\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} - \lambda \cos \alpha \cos \varphi_2 \right). \quad (15)$$

Для определения экстремума, найдём производную $dz_2/d\varphi_2$:

$$\frac{dz_2}{d\varphi_2} = -\frac{r_1}{\sin \alpha} \lambda \left[\frac{\lambda \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}} - \cos \alpha \sin \varphi_2 \right].$$

Вынеся за скобки $\sin \varphi_2$, получим:

$$\frac{dz_2}{d\varphi_2} = -\frac{r_1}{\sin \alpha} \lambda \sin \varphi_2 \left[\frac{\lambda \cos \varphi_2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}} - \cos \alpha \right]. \quad (16)$$

Выражение (16) равно 0, если

$$\sin \varphi_2 = 0 \quad (17)$$

или если

$$\left[\frac{\lambda \cos \varphi_2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}} - \cos \alpha \right] = 0 \quad (18)$$

Уравнение (17) имеет 2 корня на отрезке $[0, \pi]$ в его граничных точках 0 и π , которые соответствуют экстремумам в точках A и B .

Уравнение (18) представим в виде:

$$F(\varphi_2) - \cos \alpha = 0, \quad (19)$$

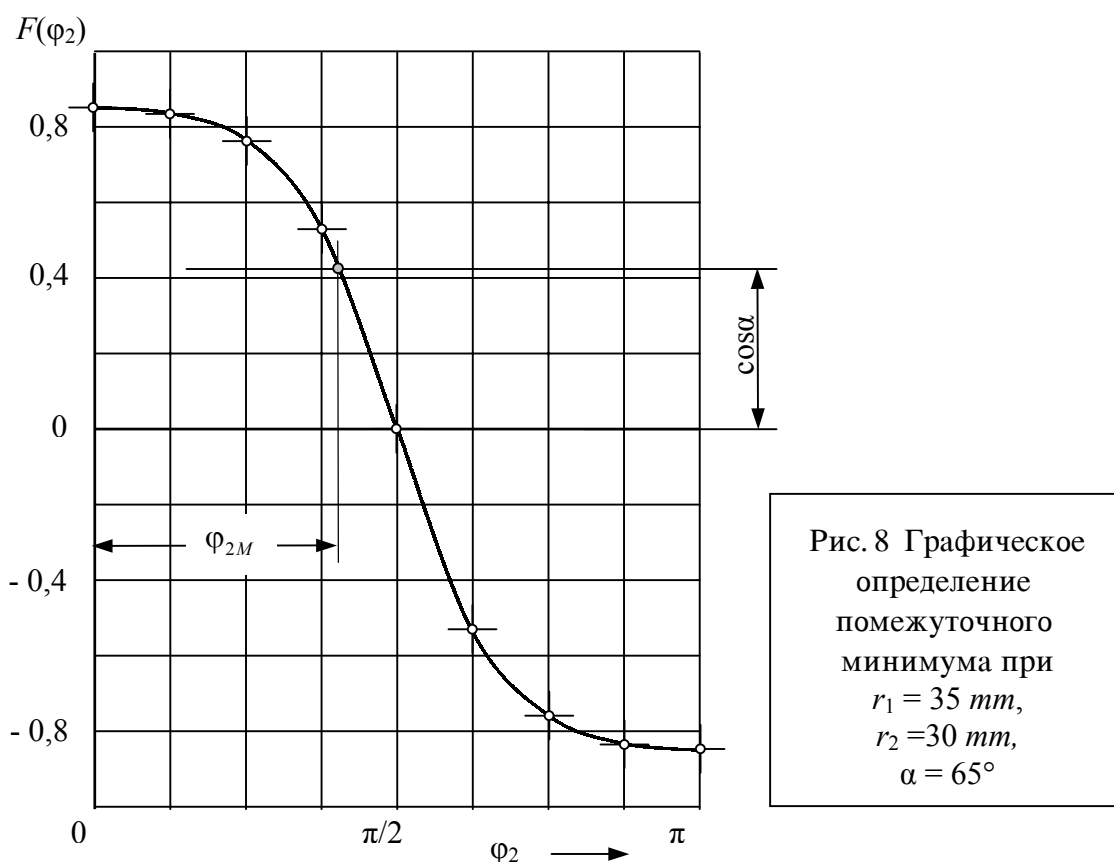
где:

$$F(\varphi_2) = \frac{\lambda \cos \varphi_2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}}. \quad (20)$$

Функция $F(\varphi_2)$ монотонно убывает $+\lambda$ до $-\lambda$ на отрезке $[0, \pi]$. (Рис. 8) Поэтому *внутри* отрезка корень может существовать только если

$$\lambda > \cos \alpha. \quad (21)$$

В первом рассмотренном примере $\lambda = 0,8751$. Поэтому предельное значение $\alpha \approx 31^\circ$. При больших значениях α развёртка "двугорбая", что подтверждает рис. 6.



Для определения положения промежуточного минимума следует найти корень уравнения (19). Преобразуем его к такому виду:

$$\lambda \cos \varphi_2 - \cos \alpha \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2} = 0.$$

Перенесём второе слагаемое в правую часть и возведём обе части в квадрат:

$$\lambda^2 \cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \alpha [1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2].$$

Заменим $\cos^2 \varphi_2$ его выражением через $\sin^2 \varphi_2$ и решим его относительно $\sin \varphi_2$:

$$\sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \alpha}}{\lambda \sin \alpha}. \quad (22)$$

Это уравнение имеет смысл только при выполнении условия (21). Тогда на отрезке $[0, \pi]$ оно имеет два корня.

Если обозначить $\sin \varphi_2 = Q$, то корнями уравнения (22) являются:

$$\arcsin(Q) \text{ и } \pi - \arcsin(Q).$$

В рассматриваемой задаче $\alpha \leq 90^\circ$. Этому случаю соответствует первое из приведенных значений. Действительно, график функции $F(\varphi_2)$ (см. рис. 8) положителен при $0 < \varphi_2 < \pi/2$

и только на этом отрезке он может получить значение равное $\cos \alpha > 0$ необходимое для выполнения условия (19). Следовательно, если на развёртке второго цилиндра существует минимум *внутри* отрезка AB , то его положение можно определить из условия:

$$\varphi_{2M} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - \cos^2 \alpha}}{\lambda \sin \alpha} \right). \quad (23)$$

Положение найденного минимума отмечено на рис. 6.

На основании изложенного следует сделать вывод, что при малых углах α и больших значениях λ , когда $\lambda > \cos \alpha$, развёртка малого цилиндра получается "двугорбой". В этом случае положение промежуточного минимума следует определить по формуле (23).

Если для двух заданных цилиндров постепенно увеличивать угол α , то угол φ_{2M} также возрастает и в предельном случае, при $\alpha = \pi/2$ становится равным $\pi/2$.

Тогда в точке B значение $z^*_2 = 0$ и развёртка цилиндра 2 становится симметричной на отрезке $[0, \pi]$

В качестве примера на рис. 9 показаны развёртки обоих цилиндров для описанного частного случая.

Правая половина развёртки цилиндра 2

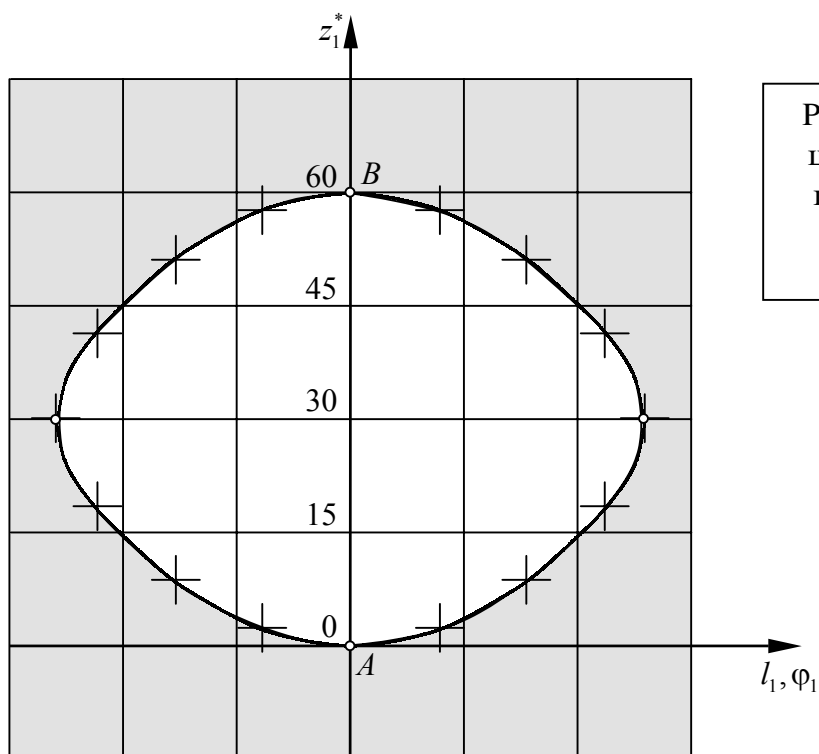
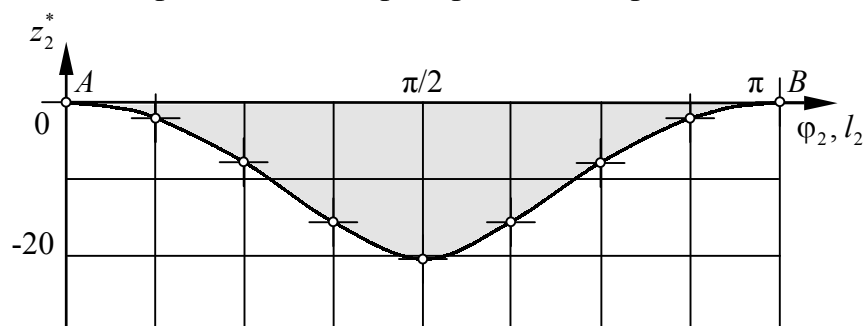


Рис. 9. Развёртки
цилиндров 1 и 2
при $r_1 = 32 \text{ mm}$,
 $r_2 = 30 \text{ mm}$,
 $\alpha = 90^\circ$